ECON 2200, Flervariabelanalyse - Handout

Kjell Arne Brekke

January 24, 2012

Dette notatet er noen begreper og noen oppgaver som kan hjelpe deg til å forberede deg til forelesningen. Om du **prøver** å regne deg gjennom disse oppgavene vil det være mye lettere å følge med på det som blir gjennomgått på forelesningen. Alle oppgavene kan besvares på fronter.uio.no. Logg inn med ditt brukernavn og passord fra uio. Om du svarer på alle spørsmålene i froner tjener du 3 poeng til obligatorisk oppgave, uavhengig av om du svarer rett eller galt.

Om du finner oppgavene vanskelig, så ikke bli motløs. Vi skal gå gjennom dette på forelesningen.

1 Funksjoner av flere variable

En trenger mer enn en innsatsfaktor for å produsere noe. Selv enkel produksjon som en kopp kaffe i kaffebaren trenger arbeidskraft (noen som jobber der), kapital (kaffemaskin), råvarer (vann, kaffe, filter) og energi (strøm). Men vi starter enklere og ser på to av dem: kapital k og arbeidskraft n. La nå

$$y = f(k, n)$$

være antall enheter y som produseres når vi har k enheter kapital og n enheter arbeidskraft.

La nå først

$$y = f(k, n) = k + n$$

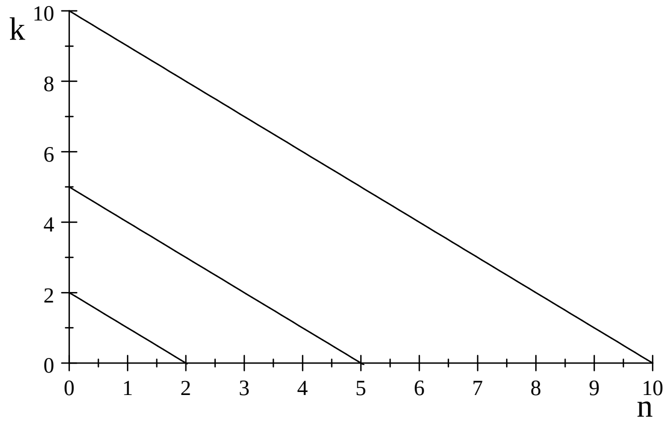
Vi kan tegne dette tredimensjonalt, og læreboka har noen eksempler. Men slike tegninger er ikke lette å lage og ikke alltid lette å lese. En annen måte å vise slike funksjoner grafiske er det vi gjør når vi trekker koter i kart: å tegne nivålinjer: For hvilke kombinasjoner av n og k vil vi produsere 5 enheter av y? Det gir ligningen

$$5 = k + n$$

eller

$$k = 5 - n$$

Tegner vi denne i et k-n diagram får vi en fallende rett linje. Gjør vi det samme for $y = 2$ og $y = 10$ får vi følgende figur.

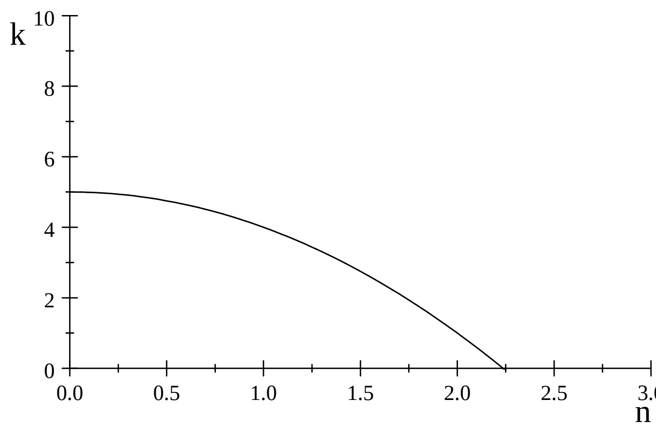


Problem 1 *Nivålinjene i for* $y = 5$ *i for følgende funksjon*

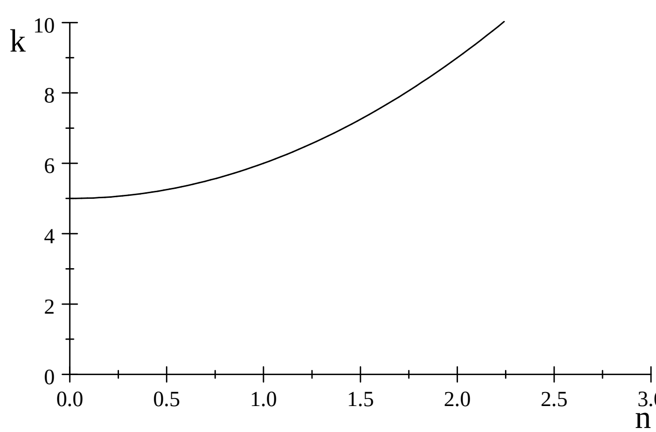
$$y = k + n^2$$

Blir:

1. Nåvålinjen blir som i figur A:



2. Nivålinjen blir som i Figur B:



2 Partielle deriverte

Med de derivasjonsreglene vi har vært kan vi nå lett derivere disse funksjonene

$$\begin{aligned} g(n) &= n^2 a \\ h(k) &= b^2 k \end{aligned}$$

Her er a og b^2 konstanter, så da får vi

$$\begin{aligned} g'(n) &= 2na \\ h'(k) &= b^2 \end{aligned}$$

Hva nå med å derivere funksjonen

$$f(n,k) = n^2 k.$$

Her har vi to innsatsfaktorer og for hver innsatsfaktor kan vi spørre: Hva skjer med produksjonen om vi øker produksjonen med en enhet arbeidskraft men holder kapitalen fast. Dette kaller vi en partiellderivert, og skriver det på to alternative måter

$$f'_n(n,k) = \frac{\partial f(n,k)}{\partial n}$$

Siden vi holder kapitalen fast blir det som en konstant, og regnestykket er som når vi deriverte funksjonen g ovenfor (bare at nå står det k og ikke a)

$$f'_n(n,k) = \frac{\partial f(n,k)}{\partial n} = 2nk$$

Tilsvarende kan vi bruke resultatet fra derivasjonen av h til å si at

$$f'_k(n,k) = \frac{\partial f(n,k)}{\partial k} = n^2$$

Problem 2 *Betrakt funksjonen*

$$f(x,y) = x^2 + y^3$$

Hva blir

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

1. $f'_x(x,y) = 2x + 3y^2$
2. $f'_x(x,y) = 2x$
3. $f'_x(x,y) = 2x + y^3$

3 Kjerneregelen

Se på følgende funksjon:

$$f(x) = (a + 3x)^2$$

Denne funksjonen kan vi deriverere med kjerneregelen vi alt har lært. Vi skriver da funksjonen som

$$\begin{aligned} f(x) &= g(u(x)) \\ \text{der } g(u) &= u^2 \\ \text{og der } u(x) &= a + 3x \end{aligned}$$

Vi kan da bruke kjerneregelen vi har lært tidligere:

$$\begin{aligned} g'(u) &= 2u \\ u'(x) &= 3 \\ f'(x) &= g'(u)u'(x) = 2u \cdot 3 = 6(a + 3x) \end{aligned}$$

Om vi bytter ut a med y blir dette en funksjon av to variable.

$$f(x, y) = (y + 3x)^2$$

Men vi kan derivere med hensyn på x akkurat som før. Når vi deriverer med hensyn på x holder vi uansett y fast som om den var en parameter. Det gir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(u(x, y)) \\ g(u) &= u^2 \\ u(x, y) &= y + 3x \end{aligned}$$

Og når vi nå bruker kjerneregelen akkurat som ovenfor får vi

$$\begin{aligned} g'(u) &= 2u \\ u'_x(x, y) &= 3 \\ f'_x(x, y) &= 2u \cdot 3 = 6(y + 3x) \end{aligned}$$

Problem 3 *Hva blir $f'_y(x, y)$? (Hint: Du kan bytte ut x med parameteren b og derivere funksjonen $h(y) = (y+3b)^2$ med kjerneregelen du alt har lært for funksjoner av èn variabel. Tenk så over: Hva er forskjellen på å derivere h og å derivere den opprinnelige funksjonen $f(x, y) = (y + 3x)^2$ med hensyn på y?) Svaret blir:*

1. $f'_y(x, y) = 2u + 1$
2. $f'_y(x, y) = 2\,(y + 3x)$
3. $f'_y(x, y) = 6\,(y + 3x)$